

Oddělení fyzikálních praktik při Kabinetu výuky obecné fyziky MFF UK

PRAKTIKUM II

Úloha č.:XVIII.....

Název: Prechodové javy v RLC obvodu

Vypracoval:.... **Viktor Babjak** ... stud. sk. .. F 11 .. dne..... 16. 11. 2005

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne: vráceno:

Odevzdal dne:

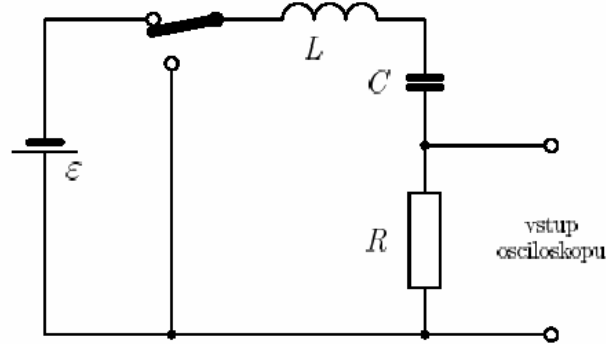
Posuzoval: **Matas**.....dne výsledek klasifikace**1**.....

Připomínky:

ŽiadneJ

Pracovné úlohy:

1. Zostavte obvod podľa obrázku 1 a zmerajte pre obvod v periodickom stave závislosť doby kmitu T na veľkosti zaradenej kapacity ($C = 0,5 - 10 \text{ mF}$, $R = 20 \Omega$). Výsledky meraní spracujte graficky a vyhodnoťte veľkosť indukčnosti L zaradenej v obvode.
2. Stanovte hodnoty aperiodizačných odporov pre desať hodnôt kapacity zaradeného kondenzátora ($1 - 10 \text{ mF}$). I v tomto prípade stanovte veľkosť indukčnosti L .
3. Zmerajte závislosť relaxačnej doby obvodu RC na veľkosti odporu alebo kapacity v obvode. Výsledky meraní spracujte graficky a porovnajte s teoretickými.



Obrázok 1 - Zapojenie obvodu

Teoretická časť:

Diferenciálna rovnica tvaru, vid' [1]

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (1)$$

popisuje systém, ktorý vykonáva voľné tlmené kmity. a , b , c sú konštanty, t čas a x premenná.

Podľa II. Kirchhoffovho zákona je súčet napätí na jednotlivých prvkoch obvodu rovný privedenému napätiu, t.j.

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int Idt = e, \quad (2)$$

kde ε je elektromotorické napätie a I je okamžitá hodnota prúdu pretekajúceho obvodom. Ak túto rovnicu zderivujeme podľa času, dostaneme rovnicu

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{d}{dt} e(t). \quad (3)$$

Ak sa napätie privedené k obvodu zmení skokom v čase $t = 0 \text{ s}$ z nulovej hodnoty na napätie zdroja ε alebo opačne, bude mať rovnica pre $t \neq 0 \text{ s}$ tvar

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0. \quad (4)$$

Rovnica (4) sa zhoduje s rovnicou (1) pre koeficienty $a = L$, $b = R$, $c = \frac{1}{C}$, $x = I$.

Periodické riešenie

Ak je $\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2$, získame periodické riešenie, pri ktorom priebeh prúdu popisuje vzťah

$$I(t) = \frac{e}{BL} e^{-At} \sin Bt, \quad (5)$$

kde $A = \frac{R}{2L}$ a $B^2 = \frac{1}{LC} - A^2$. Pri zapnutí a vypnutí sa mení iba polarita prúdu, priebeh zostáva rovnaký.

Pri periodickom riešení zodpovedá veličina B kruhovej frekvencii kmitov. Ak poznáme hodnotu zapojenej kapacity C a odporu R , tak zo zmeranej doby kmitu môžeme určiť hodnotu indukčnosti L . Pre kruhovú frekvenciu platí

$$w = B = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \Rightarrow T = \frac{2p}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (6)$$

Pre $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, môžeme vzťah (8) upraviť do tvaru

$$L = \frac{T^2}{4p^2 C}. \quad (7)$$

Medzný aperiodický stav

Ak je $A^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, hovoríme o medznom aperiodickom stave. S časom sa nemení smer prúdu, iba jeho veľkosť podľa

$$I(t) = \frac{e}{L} t e^{-At}. \quad (8)$$

Ak sa zväčšuje tlmenie, hodnota R sa blíži ku hodnote aperiodizačného odporu R_a ; doba kmitu sa predlžuje a v medznom aperiodickom stave by teoreticky vzrástla nad všetky medze. Hodnota aperiodizačného odporu je rovná

$$R_a = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow L = \frac{CR_a^2}{4}. \quad (9)$$

Aperiodický stav

Ak je $A^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$, hovoríme o aperiodickom stave. Priebeh prúdu je podobný priebehu v medznom aperiodickom stave. Dosiahne rýchlejšie maximum a naopak pomalšie klesá k nulovej hodnote. Riešenie má tvar

$$I(t) = \frac{e}{BL} e^{-At} \sinh Bt, \quad (10)$$

$$\text{kde } B^2 = \left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}.$$

RC obvod

Ak v obvode nie je zaradená indukčnosť L , mení sa prúd v obvode s časom úmerne funkcii

$$I(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (11)$$

Veličina τ sa nazýva relaxačná doba a je rovná

$$\tau = RC. \quad (12)$$

Výsledky merania:

Závislosť doby kmitu T na veľkosti kapacity C

Na meranie som použil zapojenie na obrázku 1. Nastavil som konštantný odpor $R = 20\Omega$ a kapacitu som menil v rozsahu $0,5 - 10,0 \text{ mF}$. Z časového priebehu napätia na obrazovke vyplývalo, že obvod je v periodickom stave. Pre každú hodnotu nastavennej kapacity C som určil dvakrát po 10 periód doby kmitu RLC obvodu. Namerané hodnoty sú uvedené v tabuľke 1. Výslednú hodnotu periódy T som určil ako aritmetický priemer hodnôt T_1 a T_2 .

Presnosť merania je daná tým, ako presne bolo možné odčítať hodnoty z obrazovky (jedno posunutie kurzora na obrazovke zodpovedalo 1ms) – na základe toho som odhadol aj chybu určenia periódy T . Chybu kapacitnej a odporovej dekády považujem za zanedbateľne malé.

Tabuľka 1 – Závislosť doby kmitu T na veľkosti zaradenej kapacity C

C [μF]	$10 T_1$ [ms]	$10 T_2$ [ms]	T [ms]	σ_T [ms]
0,5	57	57	5,7	0,1
1,0	81	81	8,1	0,1
1,5	100	100	10,0	0,1
2,0	118	117	11,8	0,1
2,5	129	128	12,9	0,1
3,0	143	146	14,5	0,1
3,5	154	158	15,6	0,1
4,0	164	164	16,4	0,1
4,5	179	177	17,8	0,1
5,0	189	190	19,0	0,1
5,5	198	200	19,9	0,1
6,0	207	210	20,9	0,1
6,5	215	214	21,5	0,1
7,0	227	226	22,7	0,1
7,5	235	232	23,4	0,1
8,0	240	239	24,0	0,1
8,5	250	245	24,8	0,1
9,0	257	256	25,7	0,1
9,5	263	261	26,2	0,1
10,0	270	269	27,0	0,1

Podľa vzťahu (7) pre závislosť periódy kmitov T na veľkosti zaradenej kapacity C platí $T^2 = 4p^2 LC = aC$. Z nameraných hodnôt som určil graf závislosti T^2 na C (viď graf 1) a z tejto závislosti som podľa lineárnej regresie pomocou programu *Origin* určil koeficient úmernosti a . Chybu a som určil spojením chyby lineárnej regresie a chyby dôb kmitu, ktorá sa prenáša do vzťahu pre lineárnu regresiu.

$$a = (74,0 \pm 0,5) H.$$

Pre indukčnosť L platí $L = \frac{a}{4p^2}$. Chybu L určím z kvadratického zákona prenosu chýb, viď [2]

$$L = (1,87 \pm 0,01) H.$$

Závislosť doby kmitu T v RLC obvode na veľkosti zaradenej kapacity C je znázornená v grafe 2.

Aperiodizačné odpory v závislosti na kapacite

Hodnoty aperiodizačných odporov som určoval tak, že pri danej kapacite kondenzátora som menil odpor na odporovej dekáde tak, aby nedošlo k prekmitnutiu, t.j. aby neprebíhal periodicky pohyb. Určiť tento okamih presne je náročné, a preto aj určenie hodnoty aperiodizačného odporu je zaťažené veľkou chybou, ktorú som určil na základe pozorovania časového priebehu napätia pri zmene odporu (túto chybu odhadujem pre jednotlivé merania v rozsahu od 40 Ω do 100 Ω). Chybu určenia kapacity zanedbávam v porovnaní s chybou určenia odporu na odporovej dekáde. Namerané hodnoty sú zobrazené v tabuľke 2. V tabuľke uvádzam aj hodnoty indukčnosti vypočítané podľa (9).

Tabuľka 2 – Aperiodizačné odpory

$C [\mu F]$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$R_a [\Omega]$	2400	1650	1350	1220	1090	1000	950	910	870	850
$\sigma_r [\Omega]$	100	80	80	50	50	50	50	40	40	40
$L_{teor} [H]$	1,32	1,36	1,37	1,49	1,49	1,50	1,58	1,66	1,70	1,81
$\sigma_L [H]$	0,12	0,13	0,16	0,12	0,14	0,15	0,17	0,15	0,16	0,17

Podľa vzťahu (9) pre hodnotu aperiodizačného odporu v závislosti na kapacite platí $R^2 = \frac{4L}{C} = b \frac{1}{C}$.

Z nameraných hodnôt som určil graf závislosti R^2 na C^{-1} a z tejto závislosti som podľa lineárnej regresie pomocou programu *Origin* určil koeficient úmernosti b . Chybu b som určil spojením chyby lineárnej regresie a chyby R_a , ktorá sa prenáša do vzťahu pre lineárnu regresiu. Relatívnu chybu druhej mocniny aperiodizačného odporu som určil ako dvojnásobok relatívnej chyby R_a .

$$b = (5,58 \pm 0,10) H$$

Pre indukčnosť L platí $L = \frac{b}{4}$. Chybu L určím z kvadratického zákona prenosu chýb, viď [2]

$$L = (1,40 \pm 0,03) H .$$

Vypočítané hodnoty indukčnosti L sa pohybujú v rozmedzí od $1,32 H$ – $1,81 H$ (so zväčšujúcou sa kapacitou sa zväčšuje vypočítaná hodnoty indukčnosti L). Vzhľadom k rozptylu vypočítaných hodnôt L a vzhľadom k nepresnému určeniu hodnôt aperiodizačných odporov odhadujem chybu indukčnosti L na $0,5 H$, t.j.

$$L = (1,40 \pm 0,50) H .$$

Závislosť aperiodizačného odporu R_a na kapacite C je znázornená v grafe 3.

Relaxačná doba RC obvodu

V tejto úlohe som určoval časový priebeh napätia na odpore. Pomocou programu ISES som aproximoval daný priebeh napätia funkciou $y = ae^{bx}$. Na určenie závislosti relaxačnej doby RC obvodu na veľkosti odporu alebo kapacity v obvode je podstatný koeficient b . Podľa vzťahu (11)

pre relaxačnú dobu obvodu platí $t = -\frac{1}{b}$.

Chyba b je ovplyvnená nepresným označením bodov na obrazovke a chybou výpočtu programu ISES (táto chyba je zanedbateľná – program udával chybu rádovo 10^{-4} , kým hodnoty koeficientu b sa pohybovali v rozmedzí 6–50). Relatívnu chybu koeficientu b (a tým aj chybu relaxačnej doby τ) odhadujem na 2 %.

Namerané a vypočítané hodnoty sú uvedené v tabuľkách 3 – 6. V tabuľkách uvádzam aj teoretickú hodnotu relaxačnej doby τ (podľa vzťahu (12)).

Nameraná závislosť je zobrazená v grafoch 4 a 5. V grafoch je zobrazená aj teoretická závislosť daná vzťahom (12).

Tabuľka 3 – Relaxačná doba RC obvodu pri konštantnej kapacite $C = 5 \text{ mF}$

$R [k\Omega]$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	3,0	5,0
$b [s^{-1}]$	-491,03	-241,80	-165,02	-122,17	-98,15	-64,83	-38,96
$\sigma_b [s^{-1}]$	-9,82	-4,84	-3,30	-2,44	-1,96	-1,30	-0,78
$\tau [ms]$	2,04	4,14	6,06	8,19	10,19	15,42	25,67
$\sigma_\tau [ms]$	0,04	0,08	0,12	0,16	0,20	0,31	0,51
$\tau_{teo} [ms]$	2,00	4,00	6,00	8,00	10,00	15,00	25,00

Tabuľka 4 – Relaxačná doba RC obvodu pri konštantnej kapacite $C = 10 \text{ mF}$

$R [k\Omega]$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	3,0	5,0
$b [s^{-1}]$	-245,14	-122,64	-81,81	-61,82	-49,15	-33,1	-19,77
$\sigma_b [s^{-1}]$	-4,90	-2,45	-1,64	-1,24	-0,98	-0,66	-0,40
$\tau [ms]$	4,08	8,15	12,22	16,18	20,35	30,21	50,58
$\sigma_\tau [ms]$	0,08	0,16	0,24	0,32	0,41	0,6	1,01
$\tau_{teo} [ms]$	4,00	8,00	12,00	16,00	20,00	30,00	50,00

Tabuľka 5 – Relaxačná doba RC obvodu pri konštantnom odpore $R = 5 \text{ k}\Omega$

$R [k\Omega]$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	3,0	5,0
$b [s^{-1}]$	-194,65	-99,82	-65,15	-38,87	-27,81	-21,91	-19,63
$\sigma_b [s^{-1}]$	-3,89	-2,00	-1,30	-0,78	-0,56	-0,44	-0,39
$\tau [ms]$	5,14	10,02	15,35	25,73	35,96	45,64	50,94
$\sigma_\tau [ms]$	0,1	0,2	0,31	0,51	0,72	0,91	1,02
$\tau_{teo} [ms]$	5,00	10,00	15,00	25,00	35,00	45,00	50,00

Tabuľka 6 – Relaxačná doba RC obvodu pri konštantnom odpore $R = 10 \text{ k}\Omega$

$R [k\Omega]$	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0	3,0	5,0
$b [s^{-1}]$	-98,20	-48,68	-33,13	-19,82	-14,07	-10,91	-9,92
$\sigma_b [s^{-1}]$	-1,96	-0,97	-0,66	-0,40	-0,28	-0,22	-0,20
$\tau [ms]$	10,18	20,54	30,18	50,45	71,07	91,66	100,81
$\sigma_\tau [ms]$	0,2	0,41	0,6	1,01	1,42	1,83	2,02
$\tau_{teo} [ms]$	10,00	20,00	30,00	50,00	70,00	90,00	100,00

Diskusia výsledkov:

Na meranie som používal počítačový systém ISES, ktorý meral závislosť napätia na čase. Chyba merania spôsobená systémom ISES je zanedbateľne malá v porovnaní s inými chybami merania, napr. ručným označovaním bodov na obrazovke.

Závislosť doby kmitu T na veľkosti kapacity C

Závislosť druhej mocniny doby kmitu na zapojenej kapacite je podľa predpokladu (vzťah (7)) lineárna, viď graf 1. Hodnota indukčnosti L zapojenej v obvode určená podľa tejto závislosti je zaťažená malou chybou – najviac sa na nej prejavuje nepresné označovanie bodov na obrazovke.

Aby sme mohli použiť vzťah (7), musí byť splnená podmienka $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$. Pomer $\frac{R^2}{4L^2} / \frac{1}{LC}$ je menší ako $1,3 \cdot 10^{-5}$, t.j. podmienka je splnená. Nepresnosť merania je väčšia ako nepresnosť, ktorej sa dopúšťame, keď na výpočet indukčnosti používame vzťah (7) namiesto vzťahu (6).

V grafe 2 je znázornená závislosť periódy RLC obvodu na veľkosti zaradenej kapacity (potvrdila sa teoretická závislosť $T \propto \sqrt{C}$).

Aperiodizačné odpory v závislosti na kapacite

Závislosť druhej mocniny aperiodizačného odporu na prevrátenej hodnote kapacity je podľa predpokladu (vzťah (9)) lineárna. Z tejto závislosti som určil hodnotu indukčnosti L .

Určovanie hodnôt aperiodizačných odporov je zaťažené veľkou chybou, ktorú som určil na základe pozorovania priebehu napätia (pri zmene kapacity asi o 50Ω sa priebeh napätia zmenil len nepatrne alebo vôbec). Pri meraní bolo veľmi náročné určiť, kedy presne nastal prechod medzi periodickým a medzným aperiodickým stavom.

Z toho vyplýva aj nepresné určenie hodnoty indukčnosti L . Chyba indukčnosti vypočítaná z chyby lineárnej regresie a z odhadnutej chyby odporu môže byť podhodnotená, a preto chybu indukčnosti odhadujem až na $0,5H$.

Výsledná chyba určenia indukčnosti môže byť spôsobená aj tým, že jednotlivé súčasti obvodu nie sú ideálne (napr. cievka má nenulový odpor) alebo môžeme predpokladať aj systematickú chybu použitej metódy.

Stredná hodnota indukčnosti určená v periodickom stave a stredná hodnota indukčnosti určená pomocou aperiodizačných odporov sa odlišujú o 34 %.

V *grafe 3* je znázornená závislosť aperiodizačného odporu na kapacite (potvrdila sa teoretická závislosť $R \propto C^{-\frac{1}{2}}$).

Relaxačná doba RC obvodu

Nameraná relaxačná doba RC obvodu sa v rámci chyby zhoduje s teoretickou hodnotou. Z nameraných závislostí, ktoré sú znázornené v *grafoch 4* a *5*, vyplýva lineárna závislosť medzi relaxačnou dobou a odporom resp. kapacitou.

Záver:

Pre obvod v periodickom stave som určil závislosť doby kmitu RLC obvodu na veľkosti zaradenej kapacity. Nameraná závislosť je zobrazená v *grafe 2*.

Z doby kmitu RLC obvodu v periodickom stave som určil veľkosť indukčnosti zaradenej v obvode

$$L = (1,87 \pm 0,01) H .$$

Určil som závislosť aperiodizačného odporu pre desať hodnôt kapacity zaradeného kondenzátora. Nameraná závislosť je zobrazená v *grafe 3*.

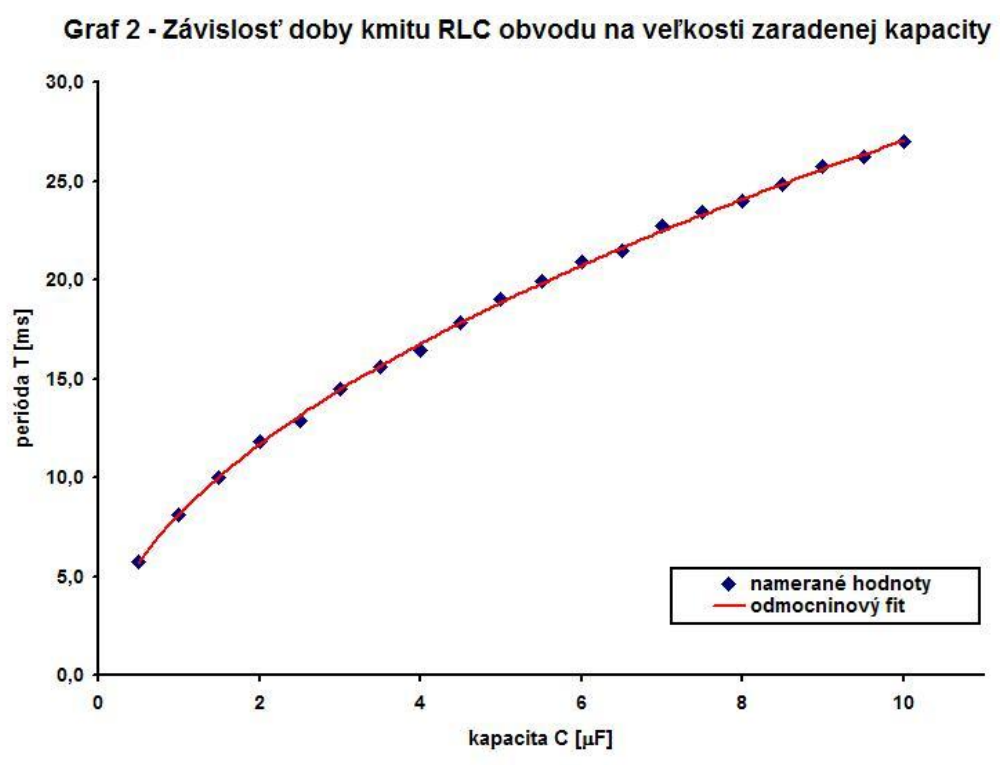
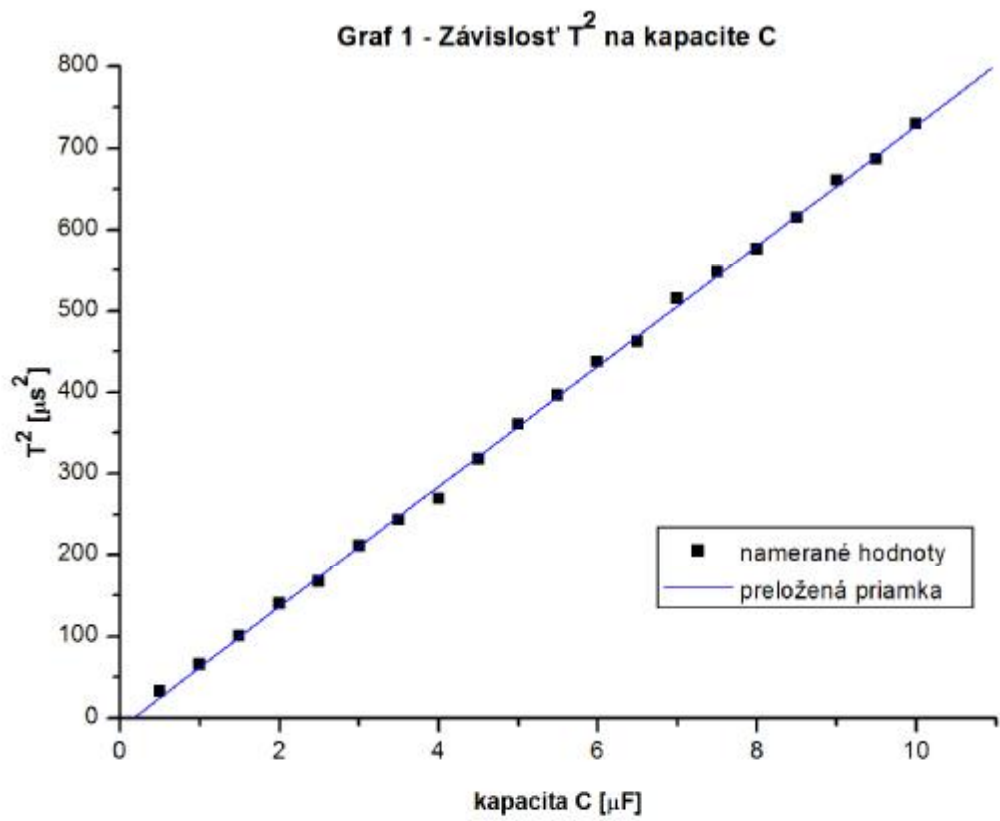
Z aperiodizačných odporov som vypočítal veľkosť indukčnosti

$$L = (1,40 \pm 0,50) H .$$

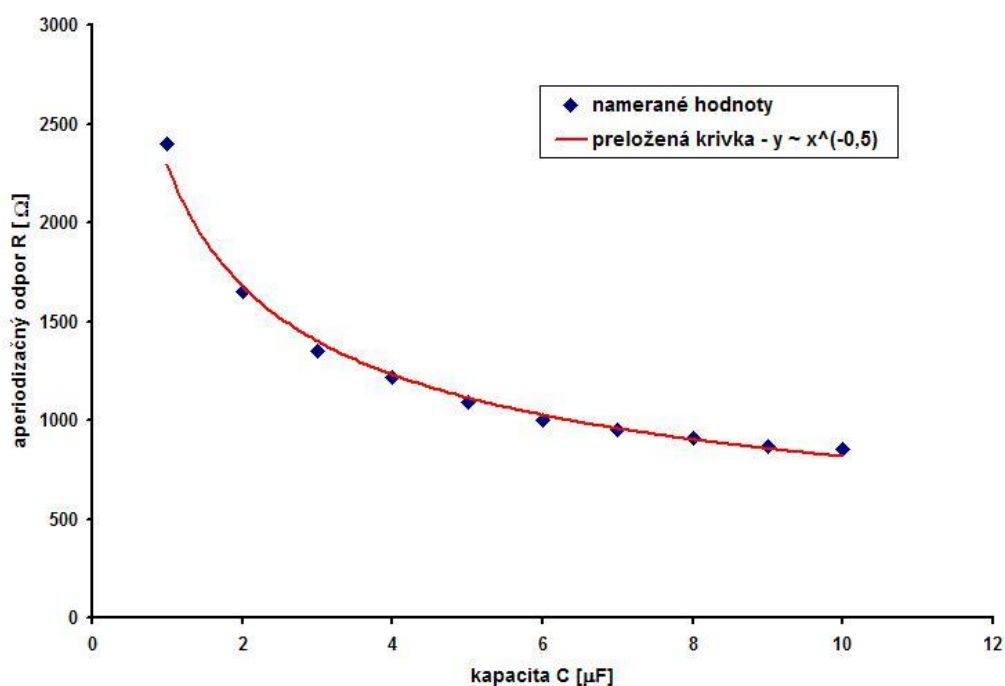
Určil som závislosť relaxačnej doby RC obvodu na veľkosti odporu alebo kapacity v obvode. Namerané závislosti sú zobrazené v *grafoch 4* a *5*.

Literatúra:

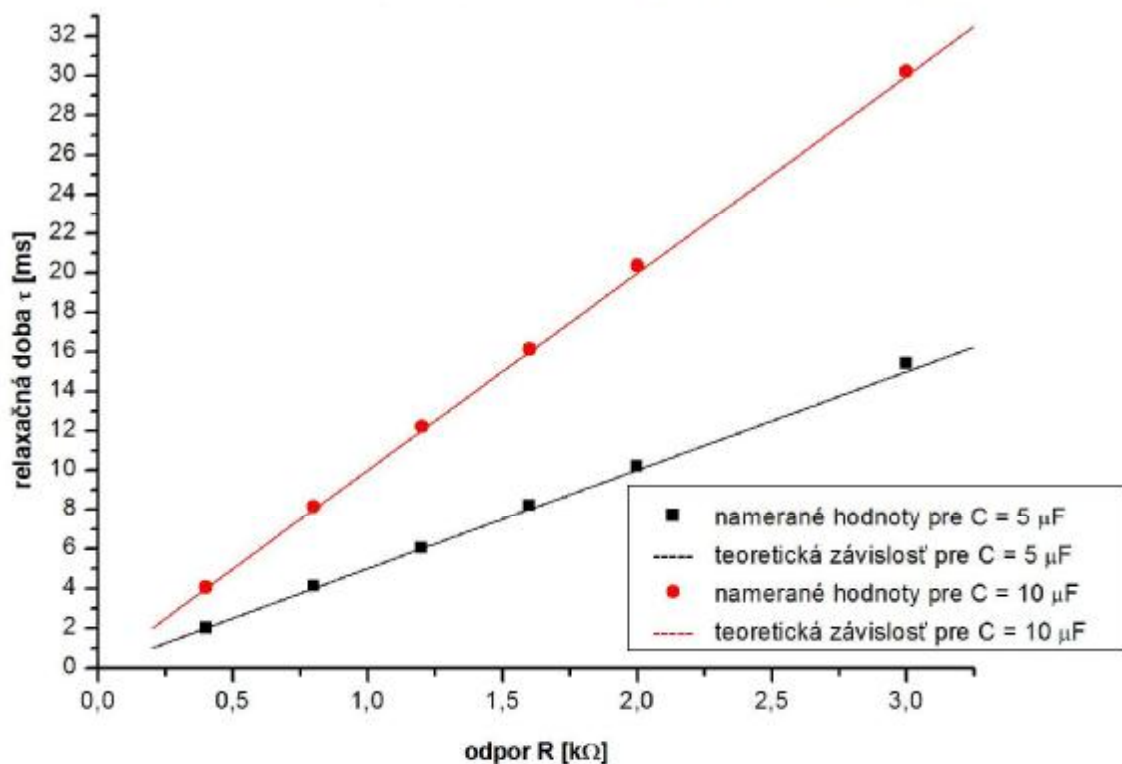
- [1] Bakule, J.; Štenberk: Fyzikálne praktikum II; SPN; Praha 1989
- [2] English, J.; Zpracování výsledků fyzikálních měření, LS 1999/2000



Graf 3 - Závislosť aperiodizačného odporu na kapacite



Graf 4 - Závislosť relaxačnej doby na veľkosti odporu pri konštantnej kapacite



Graf 5 - Závislosť relaxačnej doby na veľkosti kapacity pri konštantnom odpore

